Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана
Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Математический анализ

Модуль 1. Элементарные функции и пределы числовых последовательностей

Лекция 1.3

к.ф.-м.н. Семакин А.Н.



Условия сходимости последовательности



Условия сходимости последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной**, если

$$\exists b > 0 \; \forall n \in N\colon \; |x_n| \leq b.$$



Условия сходимости последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной**, если

$$\exists b > 0 \; \forall n \in N\colon \; |x_n| \leq b.$$

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной сверху (снизу)**, если

$$\exists b \in R \; \forall n \in N\colon \; x_n \leq b \; (x_n \geq b).$$



Условия сходимости последовательности

*Теорема (необходимое условие сходимости)**



Условия сходимости последовательности

*Теорема (необходимое условие сходимости)** Если числовая последовательность имеет конечный предел, то она ограничена.



Условия сходимости последовательности

Доказательство



Условия сходимости последовательности

Доказательство

Пусть дана последовательность $\{x_n\}$ и

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$



Условия сходимости последовательности

Доказательство

Пусть дана последовательность $\{x_n\}$ и

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Тогда по определению предела имеем:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon): \; |x_n - a| < \varepsilon.$$



Условия сходимости последовательности

Доказательство

Пусть дана последовательность $\{x_n\}$ и

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Тогда по определению предела имеем:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon |x_n - a| < \varepsilon.$$

Возьмем $\varepsilon = 1$.



Условия сходимости последовательности

Доказательство

Пусть дана последовательность $\{x_n\}$ и

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Тогда по определению предела имеем:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon |x_n - a| < \varepsilon.$$

Возьмем $\varepsilon = 1$. При таком выборе ε из определния предела получаем, что

$$\exists n_1\ \forall n > n_1\colon |x_n - a| < 1,$$



Условия сходимости последовательности

Доказательство

Пусть дана последовательность $\{x_n\}$ и

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Тогда по определению предела имеем:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon |x_n - a| < \varepsilon.$$

Возьмем $\varepsilon = 1$. При таком выборе ε из определния предела получаем, что

$$\exists n_1\ \forall n > n_1\colon |x_n - a| < 1,$$

где n_1 - это $n(\varepsilon)$, вычисленное для $\varepsilon = 1$.



Условия сходимости последовательности

Пусть $d = \max\{1, |x_1 - a|, |x_2 - a|, ..., |x_{n_1} - a|\}$.



Условия сходимости последовательности

Пусть $d = \max\{1, |x_1 - a|, |x_2 - a|, ..., |x_{n_1} - a|\}$.

Тогда

$$|x_1 - a| \leq d,\ |x_2 - a| \leq d,\ ...,\ |x_{n_1} - a| \leq d$$



Условия сходимости последовательности

Пусть $d = \max\{1, |x_1 - a|, |x_2 - a|, ..., |x_{n_1} - a|\}$.
Тогда

$$|x_1 - a| \leq d,\ |x_2 - a| \leq d,\ ...,\ |x_{n_1} - a| \leq d$$

и

$$\forall n > n_1 \colon |x_n - a| < 1 \leq d.$$



Условия сходимости последовательности

Пусть $d = \max\{1, |x_1 - a|, |x_2 - a|, ..., |x_{n_1} - a|\}$.
Тогда

$$|x_1 - a| \leq d,\ |x_2 - a| \leq d,\ ...,\ |x_{n_1} - a| \leq d$$

и

$$\forall n > n_1 \colon |x_n - a| < 1 \leq d.$$

Данные неравенства можно объединить в одно выражение

$$\forall n \in N \colon |x_n - a| \leq d.$$



Условия сходимости последовательности

Пусть $d = \max\{1, |x_1 - a|, |x_2 - a|, ..., |x_{n_1} - a|\}$.

Тогда

$$|x_1 - a| \leq d,\ |x_2 - a| \leq d,\ ...,\ |x_{n_1} - a| \leq d$$

и

$$\forall n > n_1 \colon |x_n - a| < 1 \leq d.$$

Данные неравенства можно объединить в одно выражение

$$\forall n \in N \colon |x_n - a| \leq d.$$

$$\Rightarrow -d \leq x_n - a \leq d$$



Условия сходимости последовательности

Пусть $d = \max\{1, |x_1 - a|, |x_2 - a|, ..., |x_{n_1} - a|\}$.
Тогда

$$|x_1 - a| \leq d,\ |x_2 - a| \leq d,\ ...,\ |x_{n_1} - a| \leq d$$

и

$$\forall n > n_1 \colon |x_n - a| < 1 \leq d.$$

Данные неравенства можно объединить в одно выражение

$$\forall n \in N \colon |x_n - a| \leq d.$$

$$\Rightarrow -d \leq x_n - a \leq d \Rightarrow a - d \leq x_n \leq a + d$$



Условия сходимости последовательности

Пусть $d = \max\{1, |x_1 - a|, |x_2 - a|, ..., |x_{n_1} - a|\}$.
Тогда

$$|x_1 - a| \leq d,\ |x_2 - a| \leq d,\ ...,\ |x_{n_1} - a| \leq d$$

и

$$\forall n > n_1 \colon |x_n - a| < 1 \leq d.$$

Данные неравенства можно объединить в одно выражение

$$\forall n \in N \colon |x_n - a| \leq d.$$

$\Rightarrow -d \leq x_n - a \leq d \Rightarrow a - d \leq x_n \leq a + d$

$\Rightarrow$ последовательность $\{x_n\}$ ограничена. ■



Условия сходимости последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **возрастающей (убывающей)**, если

$$\forall n \in N\colon x_n \leq x_{n+1} \ (x_n \geq x_{n+1}).$$



Условия сходимости последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **возрастающей (убывающей)**, если

$$\forall n \in N\colon x_n \leq x_{n+1}\ (x_n \geq x_{n+1}).$$

Определение

Возрастающие и убывающие последовательности называются также **монотонными**.



Условия сходимости последовательности

Теорема (достаточное условие сходимости, теорема Вейерштрасса)



Условия сходимости последовательности

Теорема (достаточное условие сходимости, теорема Вейерштрасса)
Всякая возрастающая (или убывающая) и ограниченная сверху (или снизу) последовательность имеет конечный предел.



Условия сходимости последовательности

Пример:



Условия сходимости последовательности

Пример:

$$x_n = 1 - \frac{1}{n},$$



Условия сходимости последовательности

Пример:

$$x_n = 1 - \frac{1}{n},$$

$\forall n \;\; x_n < 1$

(ограниченность),



Условия сходимости последовательности

Пример:

$$x_n = 1 - \frac{1}{n},$$

$\forall n \;\; x_n < 1$
(ограниченность),
$\forall n \;\; x_n < x_{n+1}$
(возрастание),



Условия сходимости последовательности

Пример:

$$x_n = 1 - \frac{1}{n},$$

$\forall n \;\; x_n < 1$

(ограниченность),

$\forall n \;\; x_n < x_{n+1}$

(возрастание),

$$\Downarrow$$

$$\exists \lim_{n \to \infty} x_n$$



Условия сходимости последовательности

Пример:

$$x_n = 1 - \frac{1}{n},$$

$\forall n \;\; x_n < 1$
(ограниченность),
$\forall n \;\; x_n < x_{n+1}$
(возрастание),

$$\Downarrow$$

$$\exists \lim_{n \to \infty} x_n = 1.$$



Условия сходимости последовательности

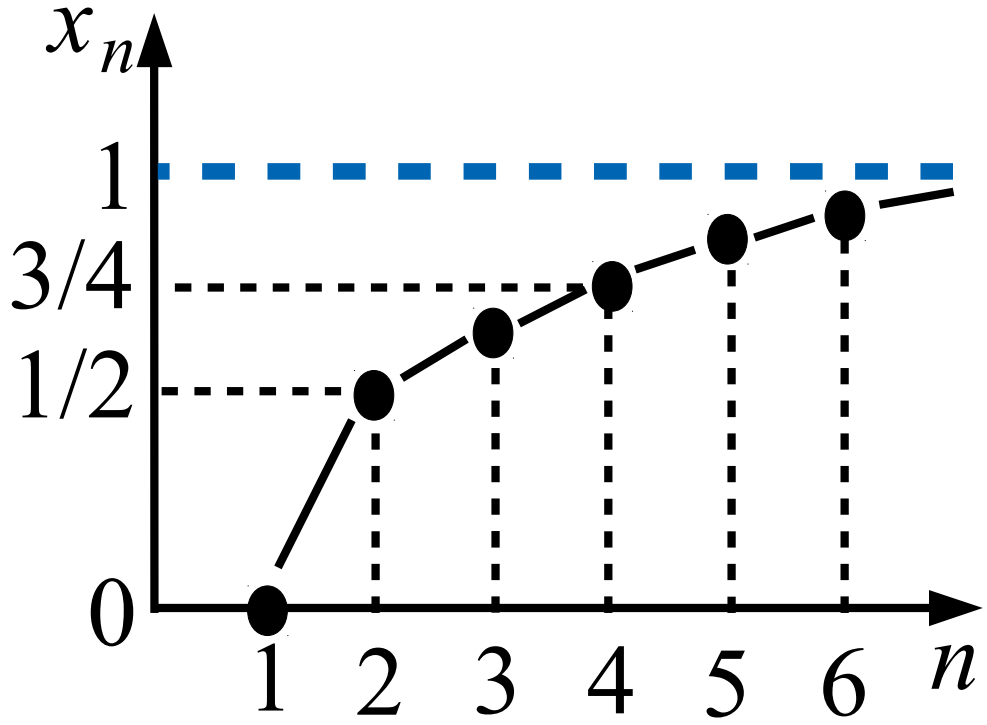
Пример:

$$x_n = 1 - \frac{1}{n},$$

$\forall n \quad x_n < 1$
(ограниченность),
$\forall n \quad x_n < x_{n+1}$
(возрастание),

$$\Downarrow$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} x_n = 1.$$



Бесконечно большая и малая последовательности



Бесконечно большая и малая последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно большой**, если

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon)$: $|x_n| > \varepsilon$.



Бесконечно большая и малая последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно большой**, если

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon)$: $|x_n| > \varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \infty$



Бесконечно большая и малая последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно большой**, если

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon)$: $|x_n| > \varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \infty$ и говорят, что последовательность $\{x_n\}$ имеет **бесконечный предел**.



Бесконечно большая и малая последовательности

Частные случаи



Бесконечно большая и малая последовательности

Частные случаи

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, если



Бесконечно большая и малая последовательности

Частные случаи

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, если

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n(\varepsilon) \in N \; \forall n > n(\varepsilon)$: $x_n > \varepsilon$



Бесконечно большая и малая последовательности

Частные случаи

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, если

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon x_n > \varepsilon$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, если



Бесконечно большая и малая последовательности

Частные случаи

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, если

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon x_n > \varepsilon$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, если

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n(\varepsilon) \in N\ \forall n > n(\varepsilon)\colon x_n < -\varepsilon$



Бесконечно большая и малая последовательности

Примеры:



Бесконечно большая и малая последовательности

Примеры: Частные случаи



Бесконечно большая и малая последовательности

Примеры: Частные случаи

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$



Бесконечно большая и малая последовательности

Примеры: Частные случаи

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

$$x_n = n$$

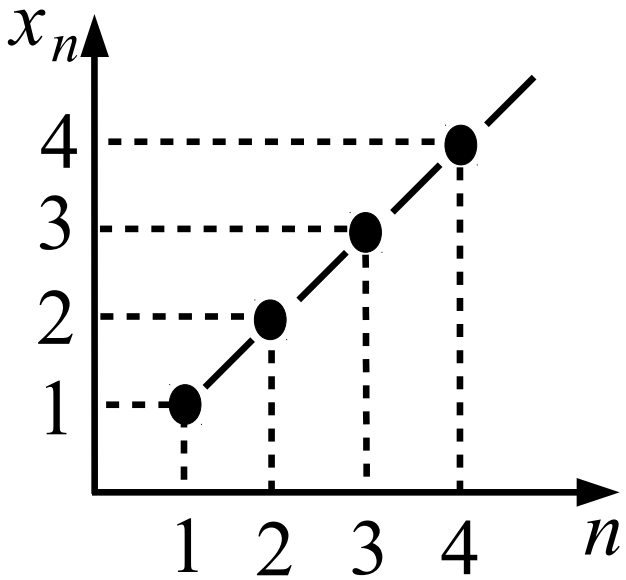


Бесконечно большая и малая последовательности

Примеры: Частные случаи

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

$$x_n = n$$





Бесконечно большая и малая последовательности

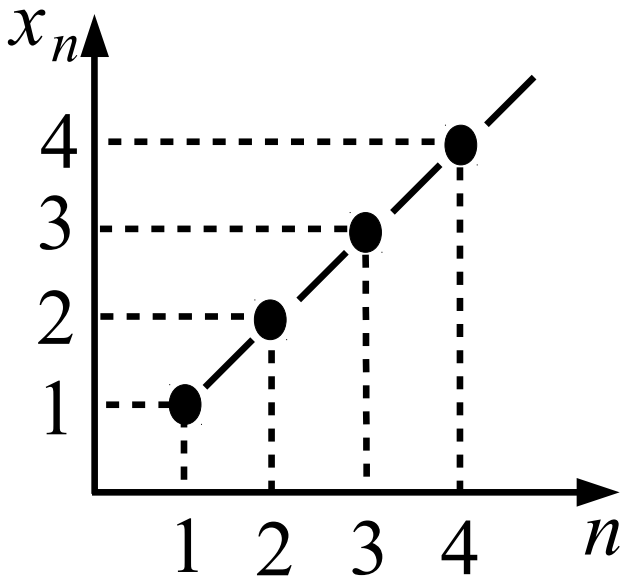
Примеры:

Частные случаи

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

$$x_n = n$$



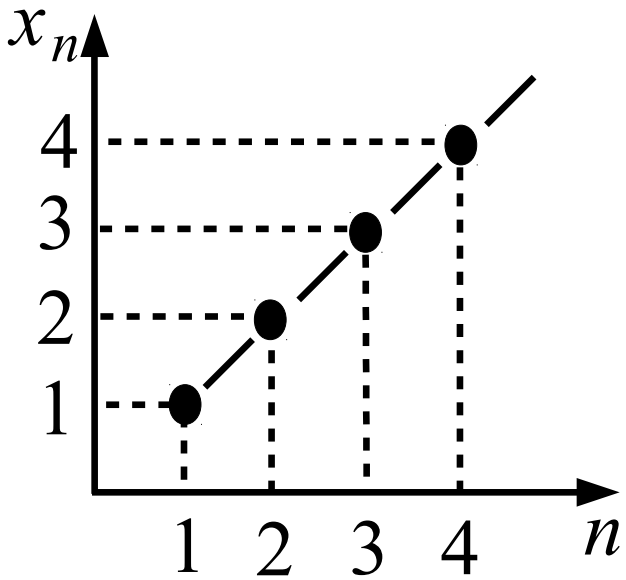


Бесконечно большая и малая последовательности

Примеры: Частные случаи

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

$$x_n = n$$



$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

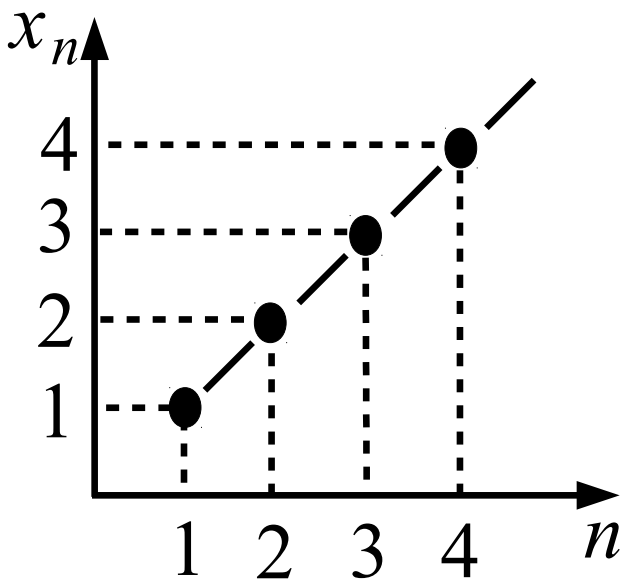
$$x_n = -n$$

Бесконечно большая и малая последовательности

Примеры: Частные случаи

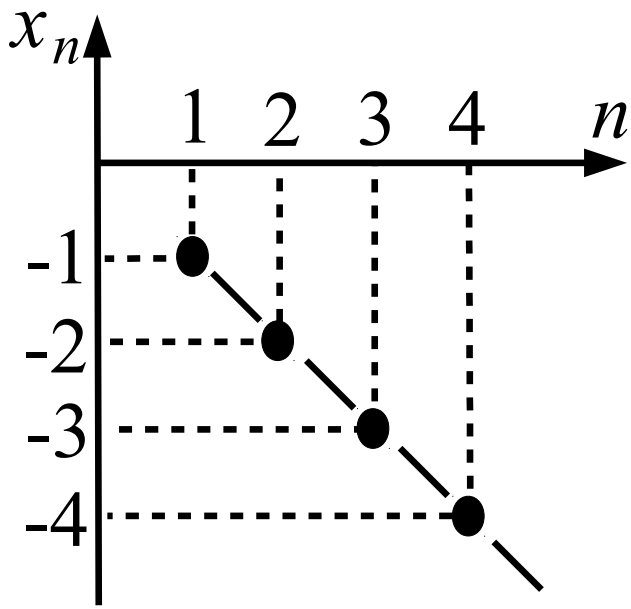
$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

$x_n = n$



$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

$x_n = -n$



Бесконечно большая и малая последовательности

Примеры:

Общий случай



Бесконечно большая и малая последовательности

Примеры:

Общий случай

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$



Бесконечно большая и малая последовательности

Примеры:

Общий случай

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

$$x_n = (-1)^{n+1} \cdot n$$



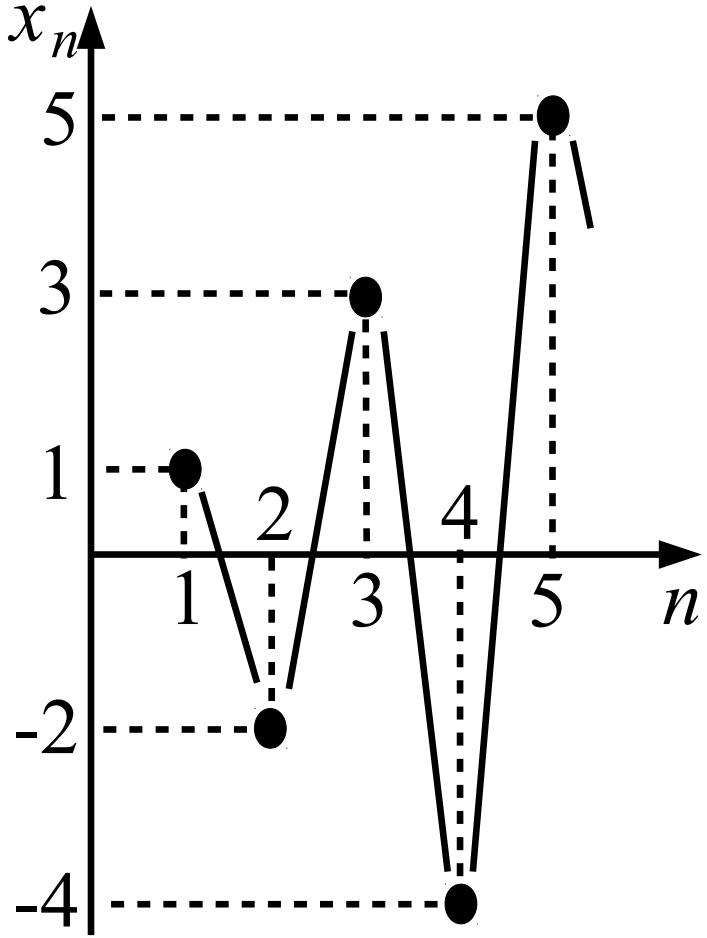
Бесконечно большая и малая последовательности

Примеры:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

$$x_n = (-1)^{n+1} \cdot n$$

Общий случай



Бесконечно большая и малая последовательности

Знак перед ∞ несет дополнительную информацию о поведении последовательности.



Бесконечно большая и малая последовательности

Знак перед ∞ несет дополнительную информацию о поведении последовательности. Мы ставим знак “$+$”, если последовательность движется вверх в сторону положительной бесконечности,



Бесконечно большая и малая последовательности

Знак перед ∞ несет дополнительную информацию о поведении последовательности. Мы ставим знак “$+$”, если последовательность движется вверх в сторону положительной бесконечности, и знак “$-$”, если она идет вниз в сторону отрицательной бесконечности.



Бесконечно большая и малая последовательности

Знак перед ∞ несет дополнительную информацию о поведении последовательности. Мы ставим знак “$+$”, если последовательность движется вверх в сторону положительной бесконечности, и знак “$-$”, если она идет вниз в сторону отрицательной бесконечности. Если направление движения однозначно определить нельзя, то знак перед ∞ не ставится.



Бесконечно большая и малая последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно малой**, если

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon)$: $|x_n| < \varepsilon$.



Бесконечно большая и малая последовательности

Определение

Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно малой**, если

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon)$: $|x_n| < \varepsilon$.

В этом случае пишут $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$.



Бесконечно большая и малая последовательности

Свойства бесконечно малых последовательностей



Бесконечно большая и малая последовательности

Свойства бесконечно малых последовательностей

1) если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - бесконечно малые, то $\{x_n + y_n\}$ - бесконечно малая



Бесконечно большая и малая последовательности

Свойства бесконечно малых последовательностей

1) если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - бесконечно малые, то $\{x_n + y_n\}$ - бесконечно малая

2) если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - бесконечно малые, то $\{x_n \cdot y_n\}$ - бесконечно малая



Бесконечно большая и малая последовательности

Свойства бесконечно малых последовательностей

1) если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - бесконечно малые, то $\{x_n + y_n\}$ - бесконечно малая

2) если $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ - бесконечно малые, то $\{x_n \cdot y_n\}$ - бесконечно малая

3) если $\{x_n\}$ - бесконечно малая, $\{y_n\}$ - ограниченная то $\{x_n \cdot y_n\}$ - бесконечно малая



Бесконечно большая и малая последовательности

Связь между бесконечно малой и бесконечно большой последовательностями определяется двумя теоремами.



Бесконечно большая и малая последовательности

*Теорема №1**

Если $\{x_n\}$ - бесконечно большая, то $\{1/x_n\}$ - бесконечно малая.



Бесконечно большая и малая последовательности

Доказательство



Бесконечно большая и малая последовательности

Доказательство

$\{x_n\}$ - бесконечно большая



Бесконечно большая и малая последовательности

Доказательство

$\{x_n\}$ - бесконечно большая $\Rightarrow$

$\forall M > 0\ \exists n(M) \in N\ \forall n > n(M)\colon |x_n| > M$



Бесконечно большая и малая последовательности

Доказательство

$\{x_n\}$ - бесконечно большая $\Rightarrow$

$\forall M > 0\ \exists n(M) \in N\ \forall n > n(M)$: $|x_n| > M$

$$\Rightarrow \frac{1}{|x_n|}$$



Бесконечно большая и малая последовательности

Доказательство

$\{x_n\}$ - бесконечно большая $\Rightarrow$

$\forall M > 0\ \exists n(M) \in N\ \forall n > n(M)\colon |x_n| > M$

$$\Rightarrow \frac{1}{|x_n|} = \left|\frac{1}{x_n}\right|$$



Бесконечно большая и малая последовательности

Доказательство

$\{x_n\}$ - бесконечно большая $\Rightarrow$

$\forall M > 0\ \exists n(M) \in N\ \forall n > n(M)\colon |x_n| > M$

$$\Rightarrow \frac{1}{|x_n|} = \left|\frac{1}{x_n}\right| < \frac{1}{M}$$



Бесконечно большая и малая последовательности

Обозначим: $\varepsilon = \dfrac{1}{M}$.



Бесконечно большая и малая последовательности

Обозначим: $\varepsilon = \dfrac{1}{M}$.

Тогда имеем



Бесконечно большая и малая последовательности

Обозначим: $\varepsilon = \dfrac{1}{M}$.

Тогда имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon): \left| \frac{1}{x_n} \right| < \varepsilon$$



Бесконечно большая и малая последовательности

Обозначим: $\varepsilon = \dfrac{1}{M}$.

Тогда имеем

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n(\varepsilon) \in N \ \forall n > n(\varepsilon): \left| \frac{1}{x_n} \right| < \varepsilon$$

$\Rightarrow \{1/x_n\}$ - бесконечно малая. ■



Бесконечно большая и малая последовательности

Теорема №2

Если $\{x_n\}$ - бесконечно малая и $\forall n$: $x_n \neq 0$, то $\{1/x_n\}$ - бесконечно большая.



Бесконечно большая и малая последовательности

Символически эти теоремы можно записать в виде:

$$\frac{1}{\infty} = 0, \qquad \frac{1}{0} = \infty.$$



Бесконечно большая и малая последовательности

Символически эти теоремы можно записать в виде:

$$\frac{1}{\infty} = 0, \qquad \frac{1}{0} = \infty.$$

Пример:



Бесконечно большая и малая последовательности

Символически эти теоремы можно записать в виде:

$$\frac{1}{\infty} = 0, \qquad \frac{1}{0} = \infty.$$

Пример:

$\{n\}$ - бесконечно большая, $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$



Бесконечно большая и малая последовательности

Символически эти теоремы можно записать в виде:

$$\frac{1}{\infty} = 0, \qquad \frac{1}{0} = \infty.$$

Пример:

$\{n\}$ - бесконечно большая, $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$

$\{1/n\}$ - бесконечно малая, $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n = 0$



Теоремы о конечных и бесконечных пределах



Теоремы о конечных и бесконечных пределах

В этих теоремах под пределами понимаются как конечный, так и определенного знака бесконечный пределы, т.е. либо число, либо $+\infty$, либо $-\infty$. Случай, когда предел равен ∞, не рассматривается.



Теоремы о конечных и бесконечных пределах

Теорема (единственность предела)



Теоремы о конечных и бесконечных пределах

Теорема (единственность предела)
Последовательность точек расширенной числовой прямой $\overline{R}$ может иметь на этой прямой только один предел.



Теоремы о конечных и бесконечных пределах

Теорема (предельный переход в неравенствах)



Теоремы о конечных и бесконечных пределах

Теорема (предельный переход в неравенствах)
Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, где $a \in \overline{R}$, и
$\forall n : x_n \le y_n \le z_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$



Число e



Число e

Число e определяется как предел последовательности чисел



Число e

Число e определяется как предел последовательности чисел

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$



Число e

Число e определяется как предел последовательности чисел

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

т.е.

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$



Число e

Число e определяется как предел последовательности чисел

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

т.е.

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Приближенные оценки дают, что $e \approx 2.718281828459045$.



Число e

Число e определяется как предел последовательности чисел

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

т.е.

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Приближенные оценки дают, что $e \approx 2.718281828459045$. В приближенных вычислениях обычно полагают $e \approx 2.72$.



Число e

Число e является основанием экспоненциальной функции $y = e^x$



Число e

Число e является основанием экспоненциальной функции $y = e^x$ и натурального логарифма $y = \ln x = \log_e x$.



Число e

Число e является основанием экспоненциальной функции $y = e^x$ и натурального логарифма $y = \ln x = \log_e x$. Также через e определяются гиперболические функции.



Число e

1) гиперболический синус

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



Число e

1) гиперболический синус

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

2) гиперболический косинус

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



3) гиперболический тангенс

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$



3) гиперболический тангенс

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

4) гиперболический котангенс

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$



Число e

Экономическое приложение:



Число e

Экономическое приложение:

В экономических моделях число e используется для вычисления доходности банковских вкладов при непрерывном начислении и капитализации процентов.



Число e

Экономическое приложение:

В экономических моделях число e используется для вычисления доходности банковских вкладов при непрерывном начислении и капитализации процентов. Допустим, мы открыли в банке вклад размером S рублей с годовой процентной ставкой r.



Число e

Экономическое приложение:

В экономических моделях число e используется для вычисления доходности банковских вкладов при непрерывном начислении и капитализации процентов. Допустим, мы открыли в банке вклад размером S рублей с годовой процентной ставкой r. По условиям вклада начисление процентов и их капитализация происходит n раз в год.



Число e

Экономическое приложение:

Тогда через m лет размер вклада составит

$$K = S \cdot \left(1 + \frac{r}{100n}\right)^{m \cdot n}.$$



Число e

Экономическое приложение:

Тогда через m лет размер вклада составит

$$K = S \cdot \left(1 + \frac{r}{100n}\right)^{m \cdot n}.$$

Соответственно, при непрерывном начислении процентов и их капитализации мы будем иметь

$$K = \lim_{n \to \infty} S \cdot \left(1 + \frac{r}{100n}\right)^{m \cdot n} = S \cdot e^{rm/100}.$$

